22/10/2019

## Διάλεξη 3η ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

**Ορισμός:** $(X, d)$, $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$
Ο $(X,d)$ καλείται μετρικός χώρος, αν είναι εφοδιασμένος με μια μετρική $d$, δηλαδή με μια συνάρτηση $d: X\times X \to \mathbb{R}_+$ τ.ω:
i) $d(x,y) \geq 0$ και $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$, $\forall x,y \in X$
ii) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in X$
iii) $\underbrace{d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)}_{\text{(τριγ. ανισ.)}}$, $\forall x,y,z \in X$

**Παραδείγματα:** 1) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $d(x,y) = |x-y|$, $x,y \in \mathbb{R}$

2) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) : x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$

$\underset{d(x,y)}{\|x-y\|_2} = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$, $x=(x_1,\dots,x_n)$
$y=(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$

3) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $d(x,y) = \|x-y\|_p$
$= (|x_1-y_1|^p + \dots + |x_n-y_n|^p)$

4) Διακριτή μετρική: $(X,d)$, $d(x,y) = 1$, $x\neq y$
$d(x,y) = 0$, αν $x=y$.
$d$: μετρική αν: i) $d(x,y) = 0$, αν $x=y$ και
$d(x,y) > 0$, αν $x \neq y$.
ii) Έστω $(x,y) \in X\times X$, αν $x\neq y$ : $d(x,y) = d(y,x) = 1$
αν $x=y$ : $d(x,y) = d(y,x) = 0$

iii) (θδο τριγ. ανισότητα)

Έστω $x, y, z \in X$.

Αν $x = z$ : $d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z)$

Αν $x \neq z$ : $d(x,z) = 1$.

Αν $x \neq y$ ή $y \neq z \Rightarrow d(x,y) = 1$ ή $d(y,z) = 1$

$\Rightarrow d(x,y) + d(y,z) = 1$ ή $2$.

Άσκηση: Έστω $X = (0, \infty)$, $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ $\forall x, y \in X$. Νδο η $d$ είναι μετρική.

Λύση

i) $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

Δηλαδή $d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in (0, \infty)$

και $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y, \ \forall x, y \in X$$

ii) $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|-\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right|$

$$= \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = d(y,x), \ \forall x, y \in X.$$

iii) $\forall x, y, z \in X$ θνδο $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Έχω ότι $d(x,z) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right|$

$$\leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right|$$

$$= d(x,y) + d(y,z)$$

Άρα ισχύει η τρ. ανισ.

Επομένως η $d$ είναι μετρική

**Ορισμός:** Έστω $(X,d)$ μ.χ.
Έστω $x \in X$, $r>0$. Ανοιχτή μπάλα με κέντρο $x$ και ακτίνα $r$ ορίζεται να είναι:
$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$
Επίσης έστω $A \subseteq X$. Το $A$ καλείται ανοιχτό στον $(X,d)$ αν $\forall x \in A$, $\exists r>0$ τ.ω $B(x,r) \subseteq A$.

**Πρόταση:** Κάθε ανοιχτή μπάλα είναι ανοιχτό σύνολο στον $(X,d)$.

Αποδ

Έστω $y \in B(x,r)$. Θέτω $s = d(x,y) < r$.
Θνδο $B_d(y, r-s) \subseteq B_d(x,r)$.

Έστω $z \in B(y, r-s) \Rightarrow d(y,z) < r-s$.
Έτσι: $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < (r-s) + s = r$
$\Rightarrow z \in B(x,r)$ //

**Θεώρημα:** Έστω $(X,d)$ μ.χ. Τότε:
i) $\emptyset, X$: ανοιχτά
ii) Αν $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένεια ανοιχτών στον $(X,d)$ $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ ανοιχτό στον $(X,d)$

iii) $A_1, \dots, A_n$ ανοιχτά $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ανοιχτό

Αποδ

i) Τα $X$, $\emptyset$ είναι τετριμμένα ανοιχτά σύνολα.

ii) Έστω $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists i \in I$ τ.ω $x \in A_i$.

$\xRightarrow{A_i:\text{ ανοιχτό}}$ $\exists r>0$ τ.ω $B(x,r) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ : ανοιχτό

iii) Έστω $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x \in A_1, \dots, x \in A_n$.

$\xrightarrow{A_i:\text{ ανοιχτά}} \exists\, r_1, \dots, r_n > 0$ τ.ω $B(x, r_1) \subseteq A_1, \dots,$
$B(x, r_n) \subseteq A_n$.

Θέτω $r = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0 \Rightarrow B(x,r) \subseteq B(x, r_i)$, $i = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow B(x,r) \subseteq A_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow B(x,r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ //

<u>Ορολογία</u>: $x \in A \subseteq X$, $x$ ονομάζεται εσωτερικό σημείο του $A$, αν $\exists r > 0$ τ.ω $B(x,r) \subseteq A$.
Συμβολίζουμε με $\mathring{A}$ = σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του $A$ = εσωτερικό του $A$.
Ισχύει ότι αν $A$: ανοιχτό : $\mathring{A} = A$.
και γενικά $\mathring{A} \subseteq A$.
Επιπλέον $\mathring{A}$ είναι ανοιχτό σύνολο και $\mathring{A}$ είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό υποσύνολο του $A$.
↳ δηλαδή αν $B$ ανοιχτό υποσύνολο του $A$, τότε $B \subseteq \mathring{A}$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $C \subseteq X$, το $C$ λέγεται κλειστό αν $C^c = X \setminus C$ είναι ανοιχτό.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $(X, \rho)$ μ.χ. Ισχύει:
i) Το $\emptyset, X$ είναι κλειστά σύνολα
ii) Αν $\{C_i\}_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών, τότε και $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ είναι κλειστό
iii) Αν $C_1, \dots, C_n$ κλειστά $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ κλειστό

## Αποδ

i) $\emptyset$ ανοιχτό $\Rightarrow X = \emptyset^c$ κλειστό
Ομοίως $\emptyset$ κλειστό.

ii) $C_i^c$ : ανοιχτό, $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} C_i^c$ είναι ανοιχτό

$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} C_i = \left(\bigcup_{i\in I} C_i^c\right)^c$ είναι κλειστό.

iii) $C_i^c$ ανοιχτό, $i=1,\dots,n \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} C_i^c$ ανοιχτό

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i^c\right)^c$ κλειστό.

Παραδείγματα: 1) Έστω $(X,d) = (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$
$A_i = (0, 1+\frac{1}{i})$, $i \in \mathbb{N}$, ανοιχτό

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (0,1]$ όχι ανοιχτό

Έστω $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow 0 < x < 1 + \frac{1}{i}$, $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$0 < x \leq 1 \Rightarrow x \in (0,1]$

Έστω $x \in (0,1] \Rightarrow 0 < x \leq 1 \Rightarrow 0 < x \leq 1 + \frac{1}{i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

2) $C_i = [0, 1-\frac{1}{i}]$, $i \in \mathbb{N}$, κλειστό, όμως

$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = [0,1)$ όχι κλειστό.

<u>Ορολογία</u>: Έστω $x \in X$. Το $x$ ονομάζεται σ.σ. του $A \subseteq X$, αν $\forall r > 0$, $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Το $x$ ονομάζεται σημείο επαφής (κλειστότητας) του $A$ αν $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

<u>Παράδειγμα</u>: Σύνολο σ.συσσ. του $A$ είναι το $[0,1]$.
Σύνολο σημείων κλειστότητας του $A$ είναι το $[0,1] \cup \{2\}$

Ισχύει ότι ένα σ.συσσωρ. είναι πάντα σημείο κλειστότητας, ενώ ένα σ.κλειστ. δεν είναι κατ' ανάγκη σημείο συσσώρευσης.

Παρατήρηση: Κάθε σημείο κλειστότητας του $A$ είτε ανήκει στο $A$ είτε είναι σ.σ του $A$.

<u>Απόδ</u>

Έστω $x$ σ.κλεισ. του $A$. Αν $x \in A$ έπεται το ζητούμενο.
Αν $x \notin A$, $\forall r > 0$: $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ και $x \notin A$.
$\Rightarrow \forall r > 0$: $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x$ σ.σ. του $A$.

$A'$ = σύνολο σ.σ. του $A$ = Παράγωγο σύνολο του $A$
$\bar{A}$ = σύνολο σ.κ. του $A$ = κλειστή θήκη του $A$.

Ισχύει $\bar{A} = A \cup A'$

<u>**Ορ**</u>: Έστω $x \in A$. Το $x$ ονομάζεται απομονωμένο σημείο του $A$ αν $x \notin A'$. $\Leftrightarrow$
$\exists r > 0$, τ.ω $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$ και $x \in A$.

<u>**Θεώρημα**</u>: $\bar{A}$ = μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το $A$ $= \bigcap\limits_{\substack{F \text{ κλειστό} \\ F \supseteq A}} F$.

<u>Απόδ</u>

1) Αν $F$ κλειστό τότε θδο: $\bar{F} = F$.
Γενικά $F \subseteq \bar{F}$.
Τώρα έστω $x \in \bar{F}$. Αν $x \in F^c$ $\xRightarrow{F^c \text{ ανοιχτό}}$
$\exists r > 0$ τ.ω $B(x,r) \subseteq F^c \Rightarrow B(x,r) \cap F = \emptyset$, άτοπο
Άρα $x \in F$, άρα $\bar{F} \subseteq F \Rightarrow \bar{F} = F$.

2) Θδο: $\bar{A}$ κλειστό. Έστω $x \in (\bar{A})^c$. Αν $\forall r > 0$,
$B(x,r) \not\subseteq (\bar{A})^c \Rightarrow \forall r > 0$, $B(x,r) \cap (\bar{A}^c)^c \neq \emptyset$
$\Rightarrow \forall r > 0$, $B(x,r) \cap \bar{A} \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$, άτοπο
$\Rightarrow \exists r > 0$, τ.ω $B(x,r) \subseteq (\bar{A})^c \Rightarrow \bar{A}$ κλειστό.

3) Έστω $F$ κλειστό τ.ω $A \subseteq F$. Θδο $F \supseteq \bar{A}$.
Έστω $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
$\Rightarrow \forall r > 0$, $B(x,r) \cap F \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{F} = F$.
$\Rightarrow \bar{A} \subseteq F$.

<u>Ορ</u>: Ακολουθία από το X είναι μια συνάρτηση από $\mathbb{N} \to X$.

<u>Συμβολισμός</u>: $x(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

<u>Συμβολισμός</u>: $\{x_n\} \subseteq A$ : και σημαίνει "Ακολουθία από το σύνολο A"

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(X,d)$ μ.χ και $\{x_n\} \subseteq X$.
Η $x_n \to x \in X$ ή $\lim x_n = x$ όταν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ τ.ω $\forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$.

Αν $\exists$ όριο της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ονομάζεται συγκλίνουσα. Επίσης αν υπάρχει το όριο της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε ~~το~~ όριο είναι μοναδικό.

<u>Απόδ</u>

Έστω $x = \lim(x_n)$ και $y = \lim(x_n)$

Τότε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n > n_1 \wedge n > n_2$
: $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ και $d(x_n, y) < \varepsilon/2$.

Θέτω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, τότε $\forall n \geq n_0$:

$$\left.\begin{array}{l} d(x_n,x) < \varepsilon/2 \\ d(x_n,y) < \varepsilon/2 \end{array}\right\} \quad d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(x_n,y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Άρα $d(x,y) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. //

**Θεώρημα:** Έστω $A \subseteq X$ και $x \in X$, Τότε

i) $x \in \bar{A}$ αν-ν $\exists \{x_n\} \subseteq A$ τ.ω $x_n \to x$.

ii) $x \in A'$ αν-ν $\exists \{x_n\} \subseteq A$ με διαφορετικούς ανά 2 όρους. τ.ω $x_n \to x$.

**Αποδ**

ii) ($\Leftarrow$) $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_1$, $x_n \neq x$.
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$.
Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$:
$x_n \in B(x, \varepsilon) \cap A$. $\xrightarrow{x_n \neq x,\ \forall n \geq n_1}$
$\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$, $x_n \in (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A$.
Ειδικότερα $(\forall \varepsilon > 0)$: $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$

($\Rightarrow$) $\forall \varepsilon > 0$: $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
Άρα για $\varepsilon = 1$: $\exists x_1 \neq x$ τ.ω $x_1 \in A$:
$d(x_1, x) < 1$.

Για $0 < \varepsilon < 1$: $\exists x_2 \neq x$: $d(x_2, x) < 1/2$.
(για $\varepsilon = \min\{d(x, x_1), 1/2\}$)

Για $0 < \varepsilon = \min\{d(x, x_2), 1/3\}$, $\exists x_3 \neq x$,
$x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2$: $d(x_3, x) < 1/3$

Άρα $\exists \{x_n\} \subseteq A$ με διαφ. ανά 2 όρους
τ.ω $x_n \to x$